

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
 ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
 מועד הבחינה: חורף תשע"ג, 2013
 מספר השאלון: 316,035806
 נספח: דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|----------------------------|---|---------------------------|---|-------------------------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | $16 \frac{2}{3} \times 2$ | — | $33 \frac{1}{3}$ נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה | — | $16 \frac{2}{3} \times 2$ | — | $33 \frac{1}{3}$ נקודות |
| פרק שלישי | — | במישור | — | $16 \frac{2}{3} \times 2$ | — | $33 \frac{1}{3}$ נקודות |
| סה"כ | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי | — | $16 \frac{2}{3} \times 2$ | — | $33 \frac{1}{3}$ נקודות |
| | — | | — | סה"כ | — | 100 נקודות |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. דן יצא מתל אביב להרצליה על אופניו, ורכב במהירות קבועה של v קמ"ש.
כעבור $\frac{1}{2}$ שעה מרגע היציאה של דן, גם אילנית יצאה על אופניה מתל אביב להרצליה, ורכבה באותו מסלול במהירות הגדולה ב-2 קמ"ש ממהירותו של דן.
אילנית ודן נפגשו בדרך להרצליה, ו- $\frac{1}{2}$ שעה לאחר הפגישה הגיעה אילנית להרצליה.
מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות v , אם נתון כי מסלול הרכיבה מתל אביב להרצליה קטן מ-25 ק"מ וגדול מ-9 ק"מ.

2. א. (1) אם מכניסים אחד מהסימנים $<$, $>$, \leq , \geq למשבצת הריקה שבביטוי:
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \square (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

מתקבל אי־שוויון הנכון לכל n טבעי.

בחר בסימן המתאים.

- (2) הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי האי־שוויון שבתת־סעיף א (1)

מתקיים לכל n טבעי.

ב. נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: $58, 62, 66, \dots, (4n + 6)$

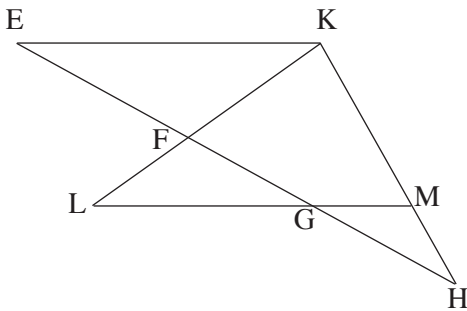
הבע את סכום הסדרה באמצעות n ($n > 12$).

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

3. בחדר I נמצאים k נשים ו- k גברים ($k > 1$). בחדר II נמצאים k נשים ו- $3k$ גברים. מטילים קובייה מאוזנת.
- אם מתקבל מספר המתחלק ב-3, בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר I.
- אם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב-3, בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר II.
- כאשר בוחרים באופן זה, ההסתברות לבחור 2 נשים מחדר I גדולה פי $\frac{15}{7}$ מההסתברות לבחור 2 נשים מחדר II.
- א. מצא את k .
- ב. מצא את ההסתברות לבחור 2 נשים באופן שתואר.
- ג. ידוע שנבחר לפחות גבר אחד באופן שתואר.
- מהי ההסתברות שנבחרו בדיוק 2 גברים מחדר I?

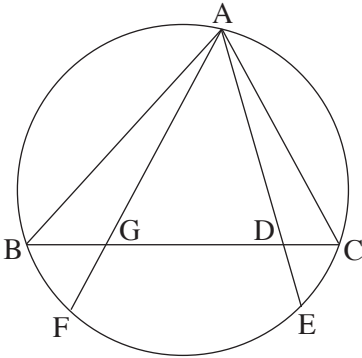
פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



4. נתון משולש KHE. נקודות M ו-G נמצאות על הצלעות KH ו-EH בהתאמה כך ש- $GM \parallel EK$.
- נקודה F נמצאת על הצלע EH. המשכי הקטעים GM ו-FK נפגשים בנקודה L (ראה ציור).
- נתון: $\angle KML = \angle KFH$.
- א. הוכח כי $\triangle KHE \sim \triangle FLG$.
- ב. נתון גם: $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$, $EH = 12.5$ ס"מ, $LG = 5$ ס"מ.
- (1) מצא את האורך של EK.

(2) מצא את היחס $\frac{MH}{KH}$.



5. משולש ABC חסום במעגל.

המיתר AF חותך את BC בנקודה G.

המיתר AE חותך את BC בנקודה D (ראה ציור).

נתון: $BF = BG$

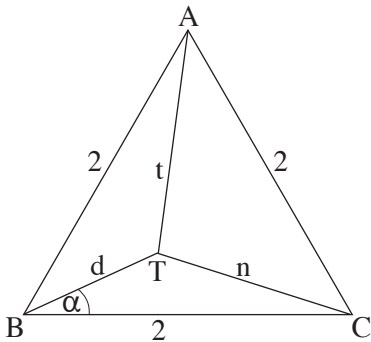
$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$$

א. הוכח כי $\triangle AGB \cong \triangle ACE$.

ב. נתון גם: $CE = 2$ ס"מ, $AC = 5$ ס"מ,

$$GC = 6$$
 ס"מ.

חשב את האורך של המיתר AE.



6. נתון משולש שווה-צלעות ABC.

נקודה T נמצאת בתוך המשולש (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle TBC = \alpha$, $CT = n$ ס"מ,

$$AT = t$$
 ס"מ, $BT = d$ ס"מ.

אורך צלע המשולש הוא 2 ס"מ.

א. הוכח כי $\sin(\alpha - 30^\circ) = \frac{n^2 - t^2}{4d}$.

ב. הבע את שטח המשולש ATC

באמצעות α ו- d .

**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות**
($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3a^2}$. a הוא פרמטר, $a > 0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

- (1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- (3) את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- (4) את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד ובהן $x = \pm a$.

- (1) היעזר בגרף של $f(x)$, והבע באמצעות a את התחום שבו פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית, ואת התחום שבו היא שלילית. נמק.
- (2) הבע באמצעות a את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f'(x)$, וקבע את סוגן.
- ד. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה- x . סמן במערכת צירים את השטח המבוקש.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = -\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} \sin x$ בקטע $0 \leq x \leq 3\pi$.

א. בקטע הנתון מצא:

(1) עבור אילו ערכי x הפונקציה מוגדרת.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בקטע הנתון.

(2) מצא משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

ג. האם יש ערכים של x בקטע הנתון שעבורם מתקיים האי־שוויון $\frac{1}{2} \sin x > \sqrt{\sin x}$?

נמק.

9. מחלקים חוט שאורכו k לשני חלקים (לאו דווקא חלקים שווים).

מחלק אחד של החוט יוצרים מעגל ומהחלק האחר יוצרים ריבוע.

סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי כאשר היקף המעגל הוא $\frac{5\pi}{\pi + 4}$.

מצא את הערך של k .

בהצלחה!