

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים – $33\frac{1}{3} \times 2$ – $66\frac{2}{3}$ נקודות

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות – $33\frac{1}{3} \times 1$ – $33\frac{1}{3}$ נקודות

סה"כ – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. נתון מעגל שמשוואתו היא: $x^2 + y^2 = a^2$. הוא פרמטר חיובי.

הזיזו את המעגל ימינה (הזזה אופקית) כך ששיק לציר ה- y .

א. הבע באמצעות a את משוואת המעגל שהתקבל.

ב. בונים מעגל המשיק מבחוץ למעגל שהתקבל בסעיף א ומשיק גם לציר ה- y . שיעור ה- x של מרכז המעגל

שבונים הוא חיובי.

מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאים מרכזי המעגלים הנבנים כך (אם יש צורך, השתמש ב- a).

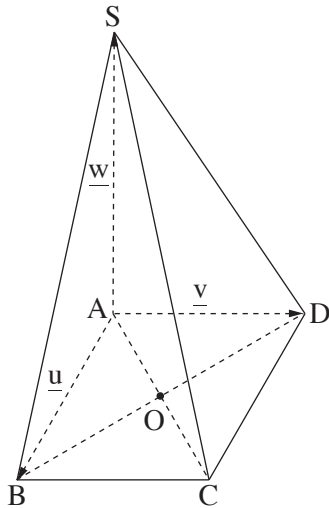
הישר $y = x + 3$ משיק בנקודה M למקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף ב.

ג. מצא את a .

ד. רשום את שיעורי נקודת ההשקה של שני המעגלים האלה:

I. המעגל שהתקבל בסעיף א.

II. המעגל שנבנה כמתואר בסעיף ב ומרכזו הוא בנקודה M .



2. נתונה פירמידה $SABCD$, שבסיסה $ABCD$, הוא ריבוע (ראה ציור).

הנקודה O היא נקודת חיתוך אלכסוני הבסיס.

הנקודה P היא נקודה על הקטע SD , והיא מקיימת $\vec{SP} = t \cdot \vec{SD}$, $t > 0$.

נסמן: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

א. הבע את הווקטור \vec{OP} באמצעות \underline{w} , \underline{v} , \underline{u} .

ב. מצא בעבור איזה ערך של t , OP מקביל למישור הפאה SAB .

נתון: אורך צלע הריבוע $ABCD$ הוא 4,

$AS = 4\sqrt{2}$ מאונך לבסיס הפירמידה,

הנקודה A היא ראשית הצירים. הנקודות B , D ו- S נמצאות

על החלק החיובי של הצירים x , y ו- z בהתאמה.

ג. מצא בעבור אילו ערכים של t , הישר OP יוצר זווית של 45° עם מישור הפאה SAD .

הנקודה T נמצאת על הקטע SC כך ש- $TABCD$ היא פירמידה ישרה.

ד. מצא את נפח הפירמידה $TABCD$.

3. נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא 1 והאיבר השני שלה הוא iz (z הוא מספר מרוכב).

נתון כי הסדרה איננה קבועה.

א. (1) רשום את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה (אם יש צורך, הבע באמצעות z).

(2) הוכח כי סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה שווה ל- $\frac{z^5 + i}{z + i}$.

ב. (1) מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^5 = -i$ (z הוא מספר מרוכב).

(2) מצא את כל הפתרונות של המשוואה $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$ (z הוא מספר מרוכב).

הנקודה A נמצאת ברביע השלישי במישור גאוס, והיא מתאימה לאחד מפתרונות המשוואה שפתרת בתת-סעיף ב (2).

ABO הוא משולש שווה צלעות במישור גאוס (O – ראשית הצירים).

ג. מצא את המספר המרוכב המתאים לנקודה B (מצא את שתי האפשרויות).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x^2 + ax + 1)$.

a הוא פרמטר, $-2 < a < 2$.

א. הראה שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש צורך, הבע באמצעות a).

ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה (אם יש צורך, הבע באמצעות a).

ד. בסוף השאלה מוצגים שלושה גרפים (I-III) המתארים את גרף הפונקציה $f(x)$ כתלות בפרמטר a .

כל אחד מן הגרפים מתאים לאחד מן התחומים (1)-(3) של a :

$$(1) \quad 0 < a < 2$$

$$(2) \quad -2 < a < 0$$

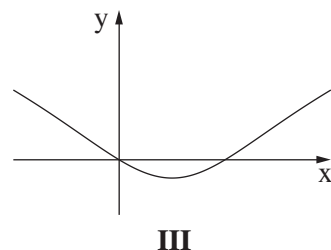
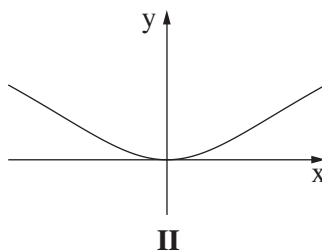
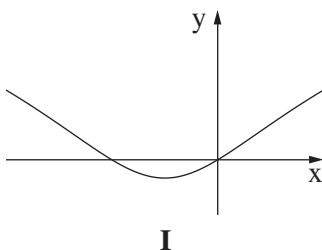
$$(3) \quad a = 0$$

כתוב איזה מתחומי הערכים (1)-(3) מתאים לכל אחד מן הגרפים.

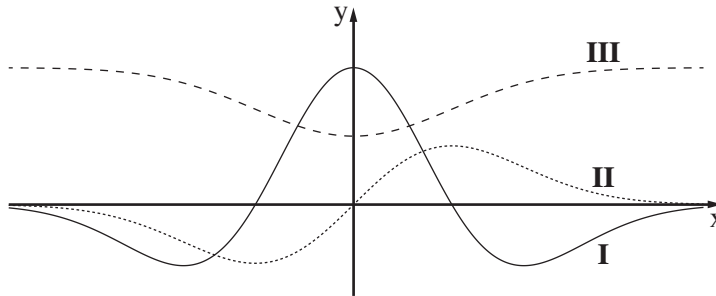
ענה על סעיף ה בעבור a המקיים $-2 < a < 0$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

ה. הבע באמצעות a ו- S את האינטגרל: $\int_0^{-a} \ln(4x^2 + 4ax + 4) dx$.



5. לפניך סרטוט המתאר את הגרפים של הפונקציות f , f' , f'' , המוגדרות לכל x .
הגרף III נמצא כולו מעל הגרף II.



- א. התאם כל אחד מן הגרפים I, II, III לפונקציות f , f' , f'' .
נמק את קביעתך.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f'(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
נתון כי $f'(x) = x \cdot e^{-x^2}$.
ב. מצא בעבור איזה ערך של x אורך הקטע AB יהיה מינימלי, ובעבור איזה ערך של x אורך הקטע AB יהיה מקסימלי.
נתון כי האורך המקסימלי של הקטע AB שווה ל- $1 + \frac{1}{2e}$.
ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

בהצלחה!